



TITLE:

# 可換バナッハ環の陰関数定理 (Function Algebraとその応用)

AUTHOR(S):

林, 実樹広

---

CITATION:

林, 実樹広. 可換バナッハ環の陰関数定理 (Function Algebraとその応用). 数理解析研究所講究録 1975, 232: 15-25

ISSUE DATE:

1975-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105464>

RIGHT:

## 可換バナッハ環の陰関数定理

茨城大 理 林 実樹広

本講では, Arens-Calderón ([2]) による 1 個の陰関数と 1 個の未知関数の場合の陰関数定理を一般化し,  $t$  個の陰関数と  $n$  個の未知関数 ( $t \geq n$ ) の場合を考える. 証明の方法は Gamelin の本 [3] にあるものに従っているが,  $t > n$  のときには trivial ではない.

記号の定義  $A$  は単位元をもつ可換バナッハ環,  $M_A$  によりその maximal ideal space を表わす.  $A$  の元  $f_1, \dots, f_m$  に対して,  $\mathbb{C}^{s+m}$  の compact set  $\sigma(h_1, \dots, h_s, f_1, \dots, f_m)$  を

$$\sigma(h_1, \dots, h_s, f_1, \dots, f_m) = \{(h_1(x), \dots, h_s(x), f_1(x), \dots, f_m(x)) : x \in M_A\}$$

により定義し, joint spectrum とする.

[定理] ([5])  $h_1, \dots, h_s \in M_A$  上の複素数値連続関数とする.  $A$  の元  $f_1, \dots, f_m$  及び, joint spectrum  $\sigma(h_1, \dots, h_s, f_1, \dots, f_m)$  の近傍で正則な  $t$  個 ( $t \geq n$ ) の関数  $G_k(z_1, \dots, z_{s+n})$  ( $k=1, \dots, t$ ) が存在して,

$$(1) \quad G_k(h_1, \dots, h_s, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n) = 0 \quad \text{on } M_A \quad \text{for all } k=1, \dots, t$$

が成立しているものとする。このとき、もし Jacobi 行列  $\frac{\partial(G_1, \dots, G_t)}{\partial(z_1, \dots, z_s)}$  の rank が  $\mathcal{O}(h_1, \dots, h_s, f_1, \dots, f_n)$  上で  $\lambda$  となっていれば、 $h_1, \dots, h_s$  は  $A$  の元の Gelfand 変換となっており、すなわち、 $A$  の元  $g_1, \dots, g_s$  で

$$(2) \quad \hat{g}_1 = h_1, \dots, \hat{g}_s = h_s$$

となっているものがある。この仮定に加えて、Jacobi 行列  $\frac{\partial(G_1, \dots, G_t)}{\partial(z_1, \dots, z_{s+n})}$  の rank が  $\mathcal{O}(h_1, \dots, h_s, f_1, \dots, f_n)$  のある近傍上でも  $\lambda$  となっていれば、 $g_1, \dots, g_s$  は functional calculus の意味で

$$(3) \quad G_k(g_1, \dots, g_s, f_1, \dots, f_n) = 0 \quad \text{for all } k=1, \dots, t$$

を満足するように取ることが出来る。更に、もし (2) 及び (3) をみたす  $A$  の元  $g_1, \dots, g_s$  が存在することがわかっているときは、才 1 の仮定のもとで、それらは一意である。

以下、定理の証明を述べる。まず次の補題が必要である。

補題 1 (Allan [1], C.T. [6], Th. 8A)  $f_1, \dots, f_n$  を  $A$  の元とする。  $V$  が  $\mathbb{C}^n$  のある open set  $D$  における subvariety で  $\mathcal{O}(f_1, \dots, f_n) \subseteq V$  となるものであれば、 $V$  上の任意の正則関数  $F$  に対して、

$A$  の元  $f$  があって,  $\hat{f} = F(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m)$  となる.

証明 Arens-Calderón の補題により,  $A$  の元  $f_{n+1}, \dots, f_m$  を取って,  $\pi(\hat{\alpha}(f_1, \dots, f_m)) \subseteq D$  とできる; ただし,  $\hat{\alpha}(\cdot)$  は  $\alpha(\cdot)$  の polynomial convex hull を表わし,  $\pi(z_1, \dots, z_n, \dots, z_m) = (z_1, \dots, z_n)$  とする.  $\hat{\alpha}(f_1, \dots, f_m)$  を含む polynomial convex open set  $P^m$  を取って  $\pi(P^m) \subseteq D$  とすれば,  $V' = P^m \cap (V \times \mathbb{C}^{m-n})$  は  $P^m$  の sub-variety で,  $\alpha(f_1, \dots, f_m)$  を含んでいる. よく知られた定理により  $V'$  上の正則関数  $F \circ \pi$  は  $P^m$  上の正則関数  $F'$  に延長できる. そこで,  $f = F'(f_1, \dots, f_m)$  とすると,  $\hat{f} = F'(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m) = F(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m)$

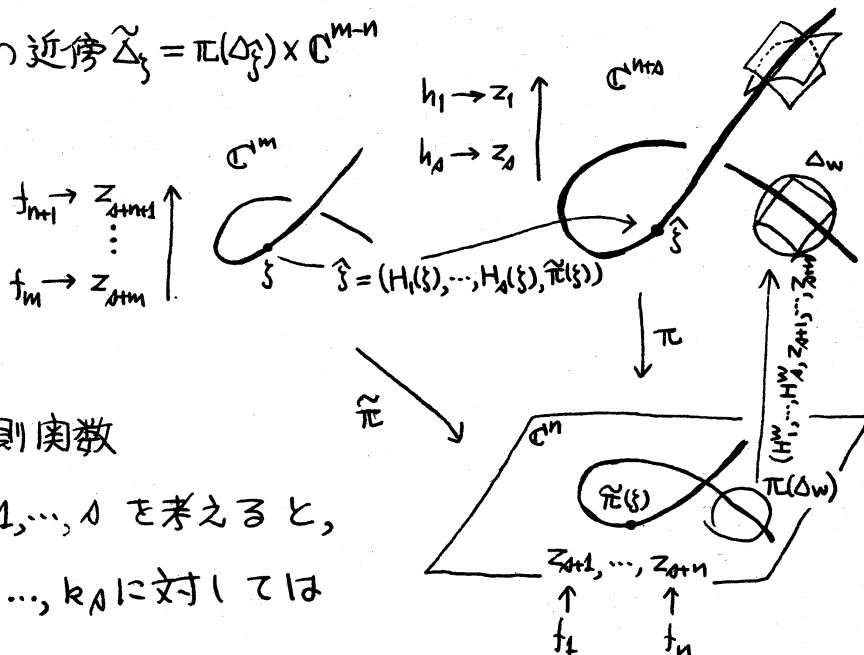
補題 2 (c.f. [3] Chap III, Th. 6.1 の証明)  $h_1, \dots, h_\lambda \in M_A$  上の連続関数とする.  $A$  の元  $f_1, \dots, f_n$  及び  $M_A$  の open covering  $\{U\}$  があって,  $x, y \in U$  かつ  $f_i(x) = f_i(y)$  for all  $i=1, \dots, n$  ならば  $h_j(x) = h_j(y)$ ,  $j=1, \dots, \lambda$  とする. このとき,  $A$  の元  $f_{n+1}, \dots, f_m$  が存在して,  $x, y \in \underline{M_A}$  に対して  $f_i(x) = f_i(y)$  for all  $i=1, \dots, m$  ならば  $h_j(x) = h_j(y)$ ,  $j=1, \dots, \lambda$  となる.

証明  $M_A \times M_A$  の対角集合を  $\Delta$  とする.  $W = \bigcup_{U \in \{U\}} U \times U$  は  $\Delta$  を含んでいるから,  $(x, y) \in M_A \times M_A \setminus W$  ならば,  $A$  の元  $f$  があって  $f(x) \neq f(y)$ . よって,  $x, y$  の小さな近傍  $U_x, U_y$  を取って,  $x' \in U_x, y' \in U_y$  ならば  $f(x') \neq f(y')$  となるようにできる.  $M_A \times M_A \setminus W$  はコンパクトであるから, 有限被覆  $U_{x_i} \times U_{y_i}$ ,



$$(5) \quad G_k(H_1(\xi), \dots, H_n(\xi), \tilde{\pi}(\xi)) = 0 \quad \text{on } \mathcal{O}(t_1, \dots, t_m) \\ \text{for } k=1, \dots, t,$$

となる. 一方  $\xi \in \mathcal{O}(t_1, \dots, t_m)$  に対して,  $\hat{\xi} = (H_1(\xi), \dots, H_n(\xi), \tilde{\pi}(\xi))$  において,  $\xi$  の近傍  $\tilde{\Delta}_\xi = \pi(\Delta_\xi) \times \mathbb{C}^{m-n}$



及び  $\tilde{\Delta}_\xi$  上の正則関数

$$\tilde{H}_j^{\hat{\xi}} = H_j^{\hat{\xi}} \circ \tilde{\pi}, \quad j=1, \dots, n \text{ を考えると,}$$

(4) から  $k=k_1, \dots, k_n$  に対しては

$$(*) \quad G_k(\tilde{H}_1^{\hat{\xi}}(\xi), \dots, \tilde{H}_n^{\hat{\xi}}(\xi), \tilde{\pi}(\xi)) = 0 \quad \text{on } \tilde{\Delta}_\xi$$

となっている. さて, joint spectrum  $\mathcal{O}(h_1, \dots, h_n, t_1, \dots, t_n)$  のコンパクト性から  $\{\Delta_w\}$  が有限被覆としてよく, 従って  $H_1^w, \dots, H_n^w$  も全体で有限個であるとしてよく, これらは  $\Delta_w$  上で一様連続であるとしてよい. このとき, 各  $\Delta_w$  は  $w$  を中心とする半径  $\varepsilon$  の polydisc  $\Delta^m(\xi; \varepsilon) \subset \tilde{\Delta}_\xi$  を次のように取ることが出来る:

$$\begin{cases} \xi \in \Delta^m(\xi; \varepsilon) \text{ ならば } (\tilde{H}_1^{\hat{\xi}}(\xi), \dots, \tilde{H}_n^{\hat{\xi}}(\xi), \tilde{\pi}(\xi)) \in \Delta^{n+m}(w; \delta/2) \\ \xi \in \Delta^m(\xi; \varepsilon) \cap \mathcal{O}(t_1, \dots, t_m) \text{ ならば } (H_1(\xi), \dots, H_n(\xi), \tilde{\pi}(\xi)) \in \Delta^{n+m}(w; \delta/2) \end{cases}$$

(5) 及び (4) によって,  $\tilde{H}_j^s$  は  $\Delta^m(s; \varepsilon)$  上では  $H_j$  の延長になっている.  
 また  $\tilde{U}_j = \Delta^m(s; \varepsilon/2)$  とおいて,  $\tilde{U}_j$  の subvariety を

$$(6) \quad V_j = \{ \xi \in \tilde{U}_j; G_k(\tilde{H}_1^s(\xi), \dots, \tilde{H}_t^s(\xi), \tilde{\pi}(\xi)) = 0, k=1, \dots, t \}$$

によって定義して,  $\tilde{U} = \bigcup \tilde{U}_j$ ,  $V = \bigcup V_j$  (ただし,  $j \in \{t_1, \dots, t_m\}$ ) とおく. (4) により  $V$  は  $\{t_1, \dots, t_m\}$  を含んでおり, (4) における一意性から,  $\tilde{H}_j^s$  は  $V$  上では一つの正則関数  $\tilde{H}_j$  を定義していて,  $H_j$  の拡張となっており,  $V$  は  $\tilde{U}$  の subvariety になることがわかる. よって,  $g_j = \tilde{H}_j(t_1, \dots, t_m)$  が求める元である.

$\text{rank} \frac{\partial(G_1, \dots, G_t)}{\partial(z_1, \dots, z_{t+n})} = 1$  が  $\{h_1, \dots, h_s, t_1, \dots, t_n\}$  の近傍で成立するという仮定を加える. (\*) にあるように,  $k=k_1, \dots, k_0$  に対しては  $G_k(\tilde{H}_1^s(\xi), \dots, \tilde{H}_t^s(\xi), \tilde{\pi}(\xi)) = 0$  on  $\tilde{\Delta}_j^s$  が成立しているが, この仮定は,  $G_k$  のうち一次独立なものは  $G_{k_1}, \dots, G_{k_0}$  だけで, その他の  $G_k$  は  $G_{k_1}, \dots, G_{k_0}$  を用いて表わすことができるということであるから, すべての  $k$  に対して (\*) が成立することになる. よって, (6) においては,  $V_j = \tilde{U}_j$ , 従って,  $V = \tilde{U}$  となり  $\mathbb{C}^m$  の open set  $\tilde{U}$  上で方程式

$$G_k(\tilde{H}_1(\xi_1, \dots, \xi_m), \dots, \tilde{H}_t(\xi_1, \dots, \xi_m), \xi_1, \dots, \xi_n) = 0, k=1, \dots, t$$

が成立する. よって各変数に  $t_1, \dots, t_n$  を代入すると,

$$G_k(g_1, \dots, g_n, f_1, \dots, f_m) = 0, \quad k=1, \dots, t$$

となり、 $\circ 2$ の主張が得られる。

最後に一意性であるが、そのために次の補題を使う。

補題3  $(g_{ki})$  を  $A$  の元からなる  $s \times t$  行列 ( $t \geq 1$ ) であって、各点  $x \in M_A$  に対して定まる行列  $(\hat{g}_{ki}(x))$  が nonsingular, すなわち,  $\text{rank}(\hat{g}_{ki}(x)) = 1$  とする。このとき,  $A$  の元からなる  $t \times s$  行列  $(h_{jk})$  が存在して,

$$\begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1t} \\ \dots & & \dots \\ h_{s1} & \dots & h_{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1s} \\ \dots & & \dots \\ g_{t1} & \dots & g_{ts} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad (1 \times 1 \text{ 単位行列})$$

となる。

証明 仮定により  $\mathbb{C}^{st}$  上で座標  $(z_{11}, \dots, z_{1s}, \dots, z_{t1}, \dots, z_{ts})$  で考えると,  $s \times t$  行列  $(z_{ki})$  は joint spectrum  $\mathcal{N}(g_{11}, \dots, g_{1s}, \dots, g_{t1}, \dots, g_{ts})$  の近傍で nonsingular である。Arens-Calderónの補題により  $A$  の元  $u_1, \dots, u_t$  があって,  $\pi(z_{11}, \dots, z_{ts}, z_1, \dots, z_t) = (z_{11}, \dots, z_{ts})$  とするとき, 行列  $(z_{ki})$  は  $\pi(\hat{\mathcal{N}}(g_{11}, \dots, g_{ts}, u_1, \dots, u_t))$  の近傍で nonsingular となる。そこで, 行列  $(z_{ki})$  を  $\mathbb{C}^{st+t}$  上の行列関数と考えて,

$\hat{\mathcal{N}}(g_{11}, \dots, g_{ts}, u_1, \dots, u_t)$  を含む open polynomial convex set  $P$  を考えれば,  $(z_{ki})$  は  $P$  上で nonsingular にできる。①を  $P$  上の正則関数の germ の作る sheaf とし,  $\mathcal{O}^1$  は ①の  $\wedge$  包の直積



をあらわす  $\mathcal{O}$ -module とする. このとき, 行列  $(z_{ki})$  によつて sheaf homomorphism  $\Phi: \mathcal{O}^s \rightarrow \mathcal{O}^t$  が induce される. quotient sheaf を  $\mathcal{I} = \mathcal{O}^t / \Phi(\mathcal{O}^s)$  とすれば, exact 列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^s \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}^t \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0$$

が得られる. ここで, 行列  $(z_{ki})$  が nonsingular ということから  $\mathcal{I}$  が locally free sheaf となる. [4] Chap. VIII, Th. 8c によつて, 上の exact 列は split する. すなわち, sheaf homomorphism  $\Psi: \mathcal{O}^t \rightarrow \mathcal{O}^s$  があつて,  $\Psi \circ \Phi = \text{identity}$  となる.  $\Psi$  の行列による表現を  $(h_{jk})$  とすると, 各  $h_{jk}$  は open set  $P$  上の正則関数であり,  $(h_{jk})(z_{jk}) = \lambda \times \lambda$  単位行列 となる. よつて,  $h_{jk} = h_{jk}(g_{11}, \dots, g_{st}, u_1, \dots, u_r)$  とおけば, 求める行列  $(h_{jk})$  が得られる.

一意性の証明:  $A$  の元  $g_1, \dots, g_s$  で,  $G_k(g_1, \dots, g_s, t_1, \dots, t_n) = 0$ ,  $k=1, \dots, t$  とするものが存在して  $\text{rank} \frac{\partial(G_1, \dots, G_t)}{\partial(z_1, \dots, z_s)} = 1$  on  $\alpha(g_1, \dots, g_s, t_1, \dots, t_n)$  とする. このとき,  $\hat{r}_1 = \dots = \hat{r}_s = 0$  なる  $A$  の元  $r_1, \dots, r_s$  があつて  $G_k(g_1+r_1, \dots, g_s+r_s, t_1, \dots, t_n) = 0$  ならば,  $A$  の元として  $r_1 = \dots = r_s = 0$  を示めせばよい. とこ  
 りで, 変数  $(z_1, \dots, z_{s+n}, a_1, \dots, a_n)$  の関数  $G_k(z_1+a_1, \dots, z_s+a_s, z_{s+1}, \dots, z_{s+n})$  は,  $\varepsilon$  を十分小さく取れば,  $\alpha(g_1, \dots, g_s, t_1, \dots, t_n) \times \Delta^0(0; \varepsilon)$  の近傍で正則となる. 変数  $a_1, \dots, a_s$  に関してテイ

ラ一展開して考えれば,  $\cap (g_1, \dots, g_n, t_1, \dots, t_n) \times \Delta^0(0; \varepsilon)$  の近傍で  
正則な関数  $F_{kij}$  があって

$$\begin{aligned} G_k(z_1 + a_1, \dots, z_n + a_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+t}) - G_k(z_1, \dots, z_{n+t}) \\ = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial G_k}{\partial z_i}(z_1, \dots, z_{n+t}) \\ = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j F_{kij}(z_1, \dots, z_{n+t}; a_1, \dots, a_n), \quad k=1, \dots, t \end{aligned}$$

と書ける. ここで, 元  $g_1, \dots, g_n, t_1, \dots, t_n, r_1, \dots, r_n$  を各変数  
に代入すると

$$\begin{aligned} (**) &= \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial G_k}{\partial z_i}(g_1, \dots, g_n, t_1, \dots, t_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^n r_i r_j F_{kij}(g_1, \dots, g_n, t_1, \dots, t_n; r_1, \dots, r_n) \end{aligned}$$

となる. さて,

$$g_{ki} = \frac{\partial G_k}{\partial z_i}(g_1, \dots, g_n, t_1, \dots, t_n) + \sum_{j=1}^n r_j F_{kij}(g_1, \dots, g_n, t_1, \dots, t_n; r_1, \dots, r_n)$$

とあって, (\*\*) を行列の形で書けば,

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{t1} & \dots & g_{tn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる.  $(\hat{g}_{ki}) = \frac{\partial(G_1, \dots, G_t)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}$  であるから, 仮定より  $(g_{ki})$  は  
 $A$  の元からなる nonsingular な行列である. 従って, 補題3に  
より左逆行列があるから  $r_1 = \dots = r_n = 0$  が得られる. (証明終)

あと書き: 補題3において, はじめ考えたときには, 行列  $(g_{ki})$  に足りない成分を補って  $t$  次の正方行列で,  $\det(\hat{g}_{ki}) \neq 0$  on  $M_A$  となるものが作れないかと思った. そうすれば  $\det(g_{ki})$  は  $A$  の invertible 元となり, Cramér の公式で  $(g_{ki})$  の逆行列が作れる. (しかし, これは  $t=0$  のときにしか成功しない). — 反例を知らないのでありますが, たぶん一般には出来ないと思います. (しかしながら, 補題3で作った quotient sheaf  $\mathcal{F} = \mathcal{O}^t / \mathcal{I}(\mathcal{O}^t)$  が free sheaf になっているならば,  $(g_{ki})$  に足りない成分を補って  $t$  次の可逆な正方行列にすることができるとは思います).

なお, 残念なことは, この定理には今のところこれといった応用のないことである.

### 参 考 文 献

1. Allan, G. R., An extension of the Silov-Arens-Calderón theorem, J. London Math. Soc. 44 (1969), 595-601.
2. Arens, R. and Calderón, A. P., Analytic functions of several Banach algebra elements, Ann. Math. 62 (1955), 204-216.
3. Gamelin, T. W., Uniform Algebras, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969.
4. Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic Functions of Several

Complex Variables, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.,  
1965.

5. Hayashi, M., Implicit function theorem for Banach algebras,  
( to appear ).

6. Stout, E. L., The Theory of Uniform Algebras, Bogden & Quigley,  
Inc. 1971.